

Sistemas homogéneos.

Si en un sistema $m \times n$ todos los términos independientes son nulos se le define como sistema homogéneo.

$$\left. \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = 0 \end{array} \right\}$$

Los sistemas homogéneos se caracterizan porque siempre admiten al menos la solución trivial:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \dots = \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

por lo que siempre son sistemas compatibles.

Ecuación degenerada.

Se dice que una ecuación lineal es degenerada si es de la forma:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b$$

dado que el primer término de la ecuación es nulo, estas ecuaciones degeneradas solo pueden ser de dos tipos:

- Trivial: si $b = 0$, en este caso cualquier colección de números reales satisface la ecuación. Por eso las soluciones de un sistema que contengan una ecuación trivial serán las soluciones del resto de las ecuaciones, siendo posible suprimir las ecuaciones triviales sin que varíe el conjunto solución.
- Absurdo: si $b \neq 0$, no tiene solución. Todo sistema que contenga una solución absurda es incompatible.

Método de eliminación de Gauss.

El método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales es una reducción escalonada para obtener un sistema equivalente más sencillo, cuya forma permite averiguar si se trata de un sistema compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible y, en los casos de compatibilidad, resolverlo.

Podemos distinguir tres etapas en el método de Gauss:

- Etapa 1. Reducción del sistema, o de su matriz asociada, a forma escalonada.
- Etapa 2. Clasificación del sistema escalonado obtenido en la etapa 1.
- Etapa 3. Resolución del sistema escalonado cuando sea compatible.

Etapas 1.

Se dice que una matriz es escalonada si se cumplen las siguientes condiciones:

- Todas las filas de ceros, si las hay, están en la parte inferior de la matriz.
- El primer elemento no nulo (de izquierda a derecha) de cada fila está situado más a la derecha que el primer elemento no nulo de la fila inmediata superior.

Toda matriz es equivalente por filas a alguna matriz escalonada. Es decir, mediante operaciones elementales entre filas, toda matriz puede llevarse a forma escalonada.

Se dice que un sistema es escalonado si su matriz ampliada es escalonada. Así pues, en un sistema escalonado:

- La primera incógnita de cada ecuación está situada más a la derecha que la primera incógnita de la ecuación precedente.
- De todas las ecuaciones, solo la ultima puede ser absurda.

$$\left(\begin{array}{cccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & : & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & : & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & : & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & : & b_m \end{array} \right) \xrightarrow{\text{OPERACIONES EQUIVALENTES}} \left(\begin{array}{cccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & : & b_1 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & : & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & : & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{m,n} & : & b_m \end{array} \right)$$

Etapas 2 y 3.

Consideremos un sistema escalonado con n incógnitas. Sean r y r' el número total de ecuaciones y el número de ecuaciones no absurdas, respectivamente. Entonces:

- Si $r \neq r'$ el sistema es incompatible.
- Si $r = r'$ el sistema es compatible: $\begin{cases} \text{Determinado si } r = n \\ \text{Indeterminado si } r < n \end{cases}$

Los sistemas escalonados sin ecuaciones absurdas y con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas se denominan sistemas triangulares.

Para un sistema de 3×3 :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \vdots & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \vdots & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \vdots & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OPERACIONES EQUIVALENTES}} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \vdots & b_1 \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} & \vdots & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{3,3} & \vdots & b'_3 \end{pmatrix}$$

Su solución se puede hallar por el método de sustitución hacia arriba.

- Primero se resuelve la última ecuación para la última incógnita: x_3 .
- A continuación, se sustituye el valor hallado de x_3 en la penúltima ecuación y se resuelve para la penúltima incógnita: x_2 .
- Después, se sustituyen los valores hallados de x_3 y x_2 en la antepenúltima ecuación y se resuelve para la primera incógnita: x_1 .

Sí el sistema tuviera más incógnitas, se resolvería de forma análoga.

Un sistema escalonado compatible indeterminado de 3×3 puede tener una de estas formas:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \vdots & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \vdots & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \vdots & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OPERACIONES EQUIVALENTES}} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \vdots & b_1 \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} & \vdots & b'_2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

ó

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \vdots & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \vdots & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \vdots & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OPERACIONES EQUIVALENTES}} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \vdots & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

compatible indeterminado con un grado de indeterminación ó compatible indeterminado con dos grados de indeterminación respectivamente. Se define como grado de indeterminación de un sistema compatible indeterminado a la diferencia entre el número de incógnitas y el número de ecuaciones linealmente independientes. El grado de indeterminación indica el número de parámetros que se necesitan para resolver el sistema.

El sistema se resuelve en función de los parámetros de abajo arriba.

Un sistema será incompatible cuando al triangularizarlo, aparezca una ecuación absurda

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \vdots & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \vdots & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \vdots & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OPERACIONES EQUIVALENTES}} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \vdots & b_1 \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \vdots & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b_3 \end{pmatrix}$$